HAUPTACHSENTRANSFORMATIONEN, BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

Es sollen Eigenwertprobleme von Hand mit der in der Vorlesung eingeführten Methode der Hauptachsentransformation gelöst werden. Außerdem üben wir das Lösen von Bewegungsgleichungen.

[H16] *Schwingungen im Potential* **[2 + 2 + 2* = 4 + 2* Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m vollführe Schwingungen um den Ursprung im Potential

$$V(x,y,z) = \frac{\kappa}{2}\Big(5x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz + 2yz\Big)\,.$$

An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung? Mit welchen Frequenzen schwingt das Teilchen ausgehend von solchen Orten um den Ursprung? *Zusatzaufgabe*: Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung als Überlagerung (Superposition) der Normalmoden an.

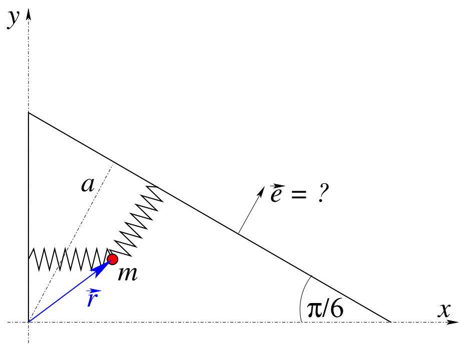
Hinweise: Die auftretende kubische Gleichung für die Eigenwerte λ enthält einen Faktor $(\lambda - ?)$, der ein quadratisches Polynom multipliziert. Beachten Sie bei der Lösung der Zusatzaufgabe gegebenenfalls Besonderheiten bei $\omega = 0$.

[H17] *Komplizierte Aufhängung* **[2 + 3 + 2 = 7 Punkte]**

An einer Masse m sind zwei gleiche Federn (Federkonstante κ, Länge ℓ) befestigt. Die anderen Enden der Federn gleiten wie skizziert reibungsfrei an geraden Drähten. Der Abstand a sei gegeben, und es wirke die Schwerkraft in y-Richtung (2-dimensionales Problem).

(a) Die gesamte auf m wirkende Kraft hängt von der Position $\vec{r}$ ab: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 - H\vec{r}$. Geben Sie $\vec{F}_0$ und die Matrix H an. Mit welcher Verschiebung des Koordinatensystems wird $\vec{F}_0 = 0$?

(b) Ab jetzt nehmen wir an, dass die Gleichgewichtslage nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems im Ursprung liegt. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System in seiner Gleichgewichtslage. Es werde dort mit $\dot{\vec{r}}_0(0) = \frac{1}{2}v_0\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ ausgelenkt. Danach gilt die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) = -H\vec{r}(t)$. Gehen Sie nun in ein mit einer Drehmatrix D gedrehtes Koordinatensystem über, in dem die Matrix $H' = DHD^{\mathsf{T}}$ diagonal wird. Welcher Drehwinkel φ ergibt sich, und wie lauten die Diagonalelemente von H'?



(c) Finden Sie nun H' mit der in der Vorlesung eingeführten Methode der Hauptachsentransformation. Erhalten Sie das gleiche Resultat? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{r}\,'$ im gedrehten System, also für H'. Transformieren Sie abschließend zurück, $\vec{r} = D^{\mathsf{T}}\vec{r}\,'$.

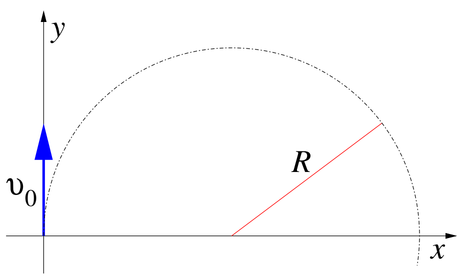
[H18] *Reibereien* **[2 + 2 + 2* = 4 + 2* Punkte]**

Wir betrachten ein geladenes Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$. Zur Zeit $t = 0$ befinde es sich am Ursprung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t=0) = (0, v_0, 0)$.

(a) Wie lautet die Bahnkurve $\vec{r}(t)$?

(b) Es wirke nun zusätzlich eine Reibungskraft $-\vec{v}f(v)$. Vereinfachen Sie mit einem geeigneten Ansatz die Bewegungsgleichung für $\vec{v}(t)$ so, dass nur noch eine Differentialgleichung für den Betrag $v(t)$ zu lösen bleibt.

(c) *Zusatzaufgabe*: Mit $f(v) = m\alpha v^n$, $n = -2, -1, 1, 2, \ldots$, lässt sich die Idee für das ein-dimensionale Reibungsproblem [P12] verallgemeinern, um diese Differentialgleichung für beliebige n zu lösen. Prüfen Sie für die Fälle konstanter Reibung ($n = -1$) und Reibung $\sim -v^2$ (also $n = +1$) nach, ob das Teilchen in endlicher Zeit zur Ruhe kommt, oder ewig eine Spiralbahn zieht.



Hinweise: Die Lorentzkraft $q\vec{v} \times \vec{B}$ steht senkrecht auf der Geschwindigkeit. Für (a) bietet sich also ein Ansatz für eine Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit an (siehe Skizze). In (c) ist statt $\partial_t v^2$ hier $\partial_t v^{-\lambda}$ zu bilden.

HINWEIS

Bitte geben Sie immer auf Ihren abgegebenen Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!